LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 5

Primjena određenog integrala u geometriji

Lekcije iz Matematike 2.

5. Primjena odredjenog integrala u geometriji.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se pokazuje kako se pomoću odredjenog integrala mogu računati površine široke klase podskupova ravnine.
Takodjer se pokazuje kako se može računati obujam rotacijskog tijela.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

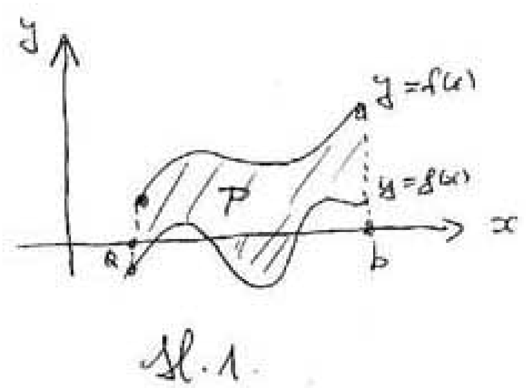
Važni podskupovi ravnine u pravilu su zadani krivuljama koji ih omedjuju. Postavlja se pitanje računanja površine takvih podskupova. Taj se problem načelno rješava pomoću odredjenog integrala, pod uvjetom da su krivulje koje omedjuju podskup grafovi (razumnih) funkcija.
Odredjeni integral omogućuje točan izvod formula za obujam kugle i stožca, i općenito, računanje obujma tijela nastalih rotacijom.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam odredjenog integrala i metoda računanja te pojam površine i obujma. Takodjer treba znati formulu za obujam V valjka visine h i polumjera r osnovke: $V = \pi r^2 h$.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

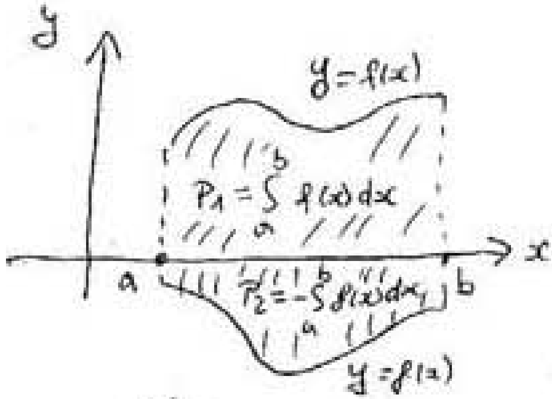
Računanje površina podskupova ravnine zadanih uvjetima:
$a \leq x \leq b$ **i** $g(x) \leq y \leq f(x)$ **(sl.1.)**.



Sl. 1.

$$\mathcal{P} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Na sl.2. je ilustracija formule ako je f pozitivna, a g negativna.



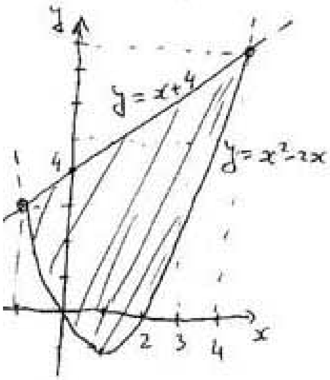
Sl.2

Primjer 1. Procijenimo, a poslije točno odredimo površinu podskupa ravnine omedjenom krivuljama s jednadžbama $y = x + 4$ i $y = x^2 - 2x$.

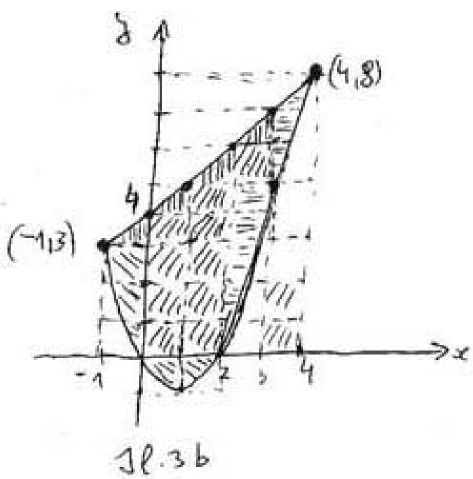
Vidimo da je riječ o označenom dijelu ravnine izmedju pravca i parabole (sl.3.a.). Vidimo, takodjer, da možemo primijeniti gornju formulu, samo treba odrediti presjek krivulja: točke A i B. To se ostvaruje rješavanjem sustava:

$$y = x^2 - 2x$$
$$y = x + 4$$

Dobijemo $A(-1, 3)$ i $B(4, 8)$. Sad možemo procijenjivati (sl.3.b.) i točno računati:
$\mathcal{P} = \int_{-1}^{4}[(x+4) - (x^2 - 2x)]dx = \int_{-1}^{4}[-x^2 + 3x + 4]dx = (-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x)|_{-1}^{4} = \frac{125}{6} \approx 21.$



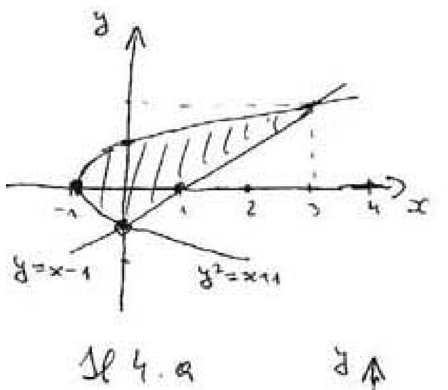
Sl.3.a.

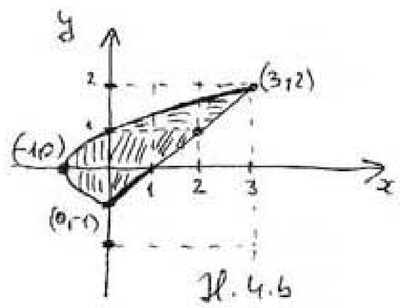


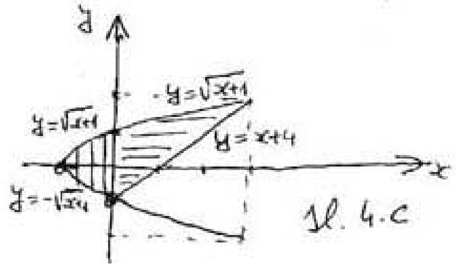
Sl.3 b

Primjer 2.. Izračunajmo površinu omedjenu krivuljama s jednadžbama: $y^2 = x + 1$ i $y = x - 1$.

Rješavanjem sustava dobije se $A(0, -1)$, $B(3, 2)$ (sl.4.a.) i gruba procjena $\mathcal{P} \approx 4.5$ (sl.4.b.).
Ako želimo primijeniti gornju formulu treba područje podijeliti na dva dijela (sl.4.c.) pa računati dva integrala.
Zadatak ostavljamo za samostalan rad. Vidjet ćemo kako se postupak može pojednostavniti, tako da se račun provede izravno.

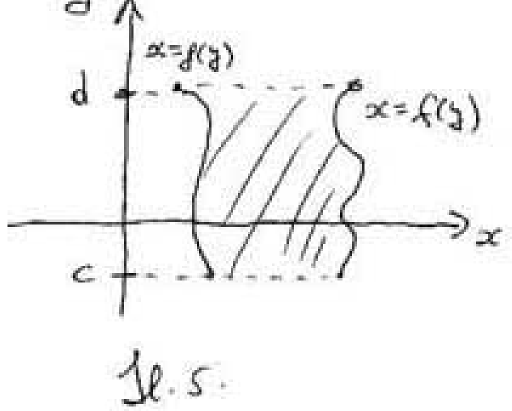




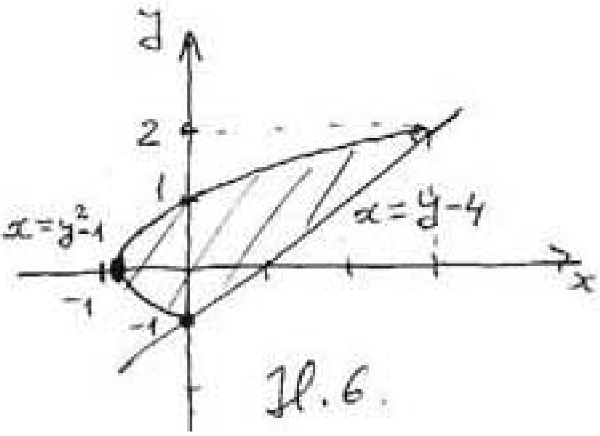


Računanje površina podskupova ravnine zadanih uvjetima: $c \leq y \leq d$ i $g(y) \leq x \leq f(y)$ (sl.5.).

$$\mathcal{P} = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$



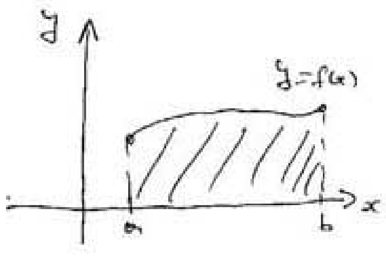
Primjer 3. - drugo, prirodnije, rješenje Primjera 2.).
Vidimo (sl.6.) da je:
$\mathcal{P} = \int_{-1}^{2}[(y+1)-(y^2-1)]dy = (-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-2y)|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} = 4.5$,
što je u skladu s procjenom.



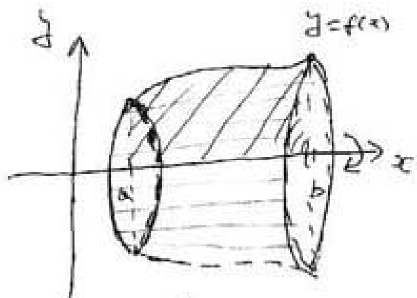
Sl.6.

Obujam rotacijskog tijela.

Uočimo dio ravnine izmedju grafa funkcije f i osi x, za x izmedju a i b (sl.7.a.).
Rotacijom oko osi x dobije se rotacijsko tijelo (sl.7.b.).
Presjek tog tijela s ravninom okomitiom na x-os u koordinati x jest krug sa središtem na x-osi, polumjera $f(x)$.



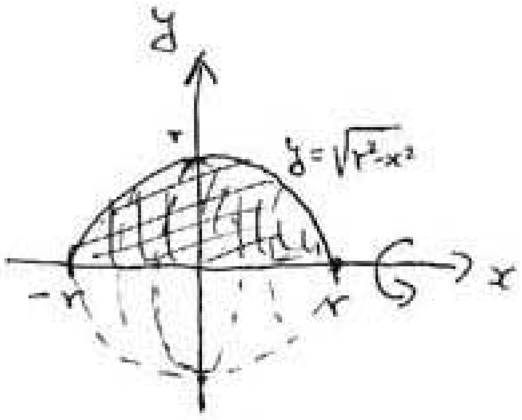
Sl.7a.



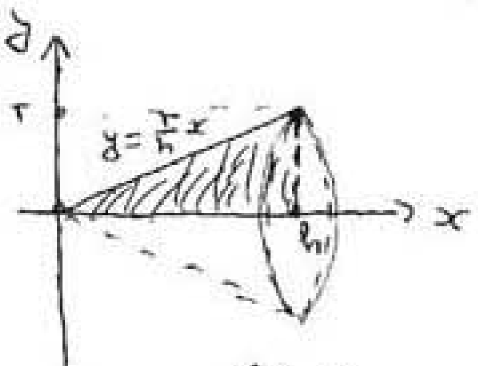
Sl.7b

Primjer 4. - kugla i stožac kao rotacijska tijela.
(i) Rotacijom oko osi x polukruga polumjera r sa središtem u ishodištu, nastaje kugla polumjera r sa središtem u ishodištu (sl.8). Jednadžba gornje polukružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Dakle, polukrug je dio ravnine izmedju grafa funkcije $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ i x osi za x izmedju $-r$ i r.

(ii) Rotacijom oko osi x pravokutnog trokuta sa sl.9. nastaje stožac polumjera r i visine h. Jednadžba pravca na kojemu je hipotenuza trokuta je $y = \frac{r}{h}x$,



sl. 8.

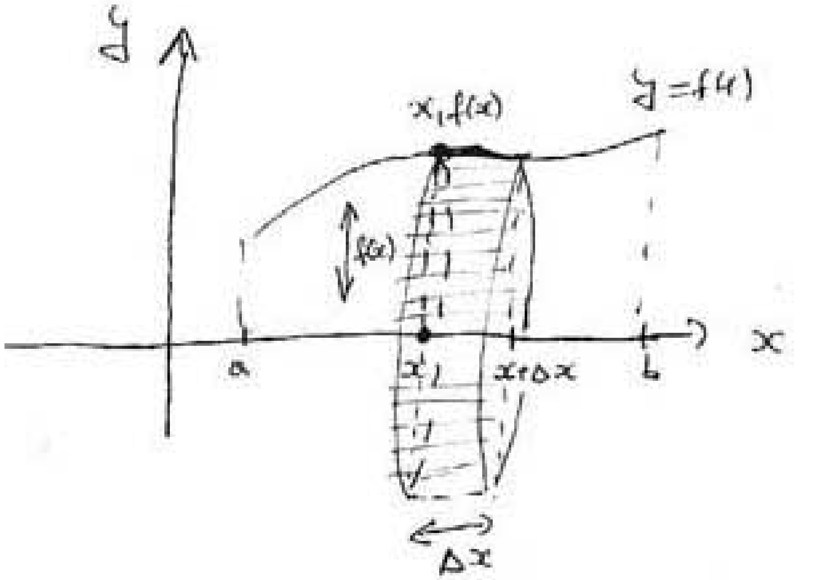


sl. 9.

pa je trokut dio ravnine izmedju grafa funkcije $f(x) := \frac{r}{h}x$ i x osi za x od 0 do h.

Primjer 5. - formula za obujam rotacijskog tijela.

Iz sl.10. vidimo da je djelić rotacijskog tijela od x do $x + \Delta x$ pseudovaljak, tj. približno to je valjak polumjera $f(x)$ i visine Δx.



sl. 10.

Dakle:

$$\Delta V(x) \approx \pi f^2(x)\Delta x$$

odakle zaključujemo

$$dV(x) = \pi f^2(x)dx$$

pa je, prema definiciji odredjenog integrala

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

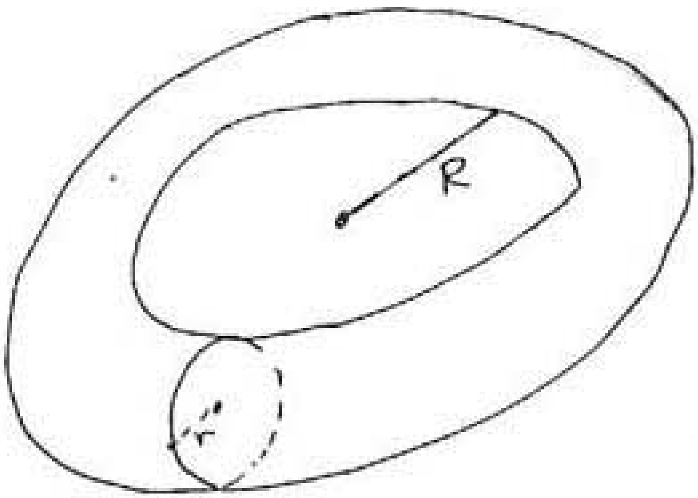
Primjer 6. - obujam kugle i stožca.
Koristeći se Primjerom 4. i formulom za obujam rotacijskog tijela, dobijemo:

(i) **Obujam kugle polumjera** r
$V = \pi \int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi(r^2x - \frac{x^3}{3})|_{-r}^{r} = \pi\frac{4r^3}{3}$

(ii) **Obujam stožca polumjera** r **i visine** h
$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}|_0^h = \pi\frac{r^2h}{3}$.

V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte obujam torusa (automobilske gume), ako je poprečni presjek krug polumjera r, a unutarnji promjer (promjer praznog dijela) $2R$ (sl.11.).



sl. 11.